第4章　粘性流体の力学

第2章では完全流体の力学を学んだ．完全流体では，流体の中に接線応力が現れないので，例えば平行流を考えると，隣の流線の流体粒子がどのような速さで流れているかには関係なく，流体は流線ごとに独立に流れることができる．しかし，現実の流体では，もし流体のある部分の速度が速ければ，それにひきずられて隣の流線上の流体も速くなるであろう．これは，流体の中で接線応力が現れることによって起こるのであり，このように接線応力が現れる流体を粘性流体という．

ここでは特に，密度が一様である非圧縮性粘性流体について議論することにする．1.8 節で導出したように，密度一様な粘性流体の運動は連続の方程式とナヴィエ - ストークス方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{4.2}$$

によって記述されるので，この章ではこれらの基礎方程式を出発点として議論を進めることになる．

4.1　レイノルズ数と相似則

ナヴィエ - ストークス方程式 (4.2) の外力 $\boldsymbol{K}$ が保存力である場合には，$\boldsymbol{K}$ はポテンシャル $\mathit{\Pi}$ を用いて $\boldsymbol{K} = -\nabla\mathit{\Pi}$ と表されるので，$p^* \equiv p + \rho\mathit{\Pi}$ とおくことによって，(4.2) は

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p^* + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{4.3}$$

と書き直すことができる．ナヴィエ - ストークス方程式 (4.3) の各項について，$D\boldsymbol{u}/Dt$ は **慣性項** (inertial term)† と，$-(1/\rho)\nabla p^*$ は **圧力項** (pressure term) と，そして $\nu\nabla^2\boldsymbol{u}$ は **粘性項** (viscous term) と呼ばれる．

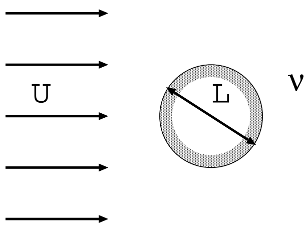

図 4.1 流れの代表的なスケール・速度・動粘性率

いま，ある流体運動を特徴づける代表的長さスケールを L，代表的速度スケールを U として，(4.3) に現れる量を

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}} &\equiv \frac{\boldsymbol{x}}{L}, \quad \tilde{t} \equiv \frac{t}{L/U}, \\ \tilde{\boldsymbol{u}} &\equiv \frac{\boldsymbol{u}}{U}, \quad \tilde{p}^* \equiv \frac{p^*}{\rho U^2} = \frac{p+\rho\Pi}{\rho U^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

と無次元化する．無次元量は ˜ をつけて表した．これらを用いて運動方程式 (4.3) を無次元化すると

$$\frac{D\tilde{\boldsymbol{u}}}{D\tilde{t}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p}^* + \frac{1}{Re}\tilde{\nabla}^2\tilde{\boldsymbol{u}}, \tag{4.5}$$

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu} \tag{4.6}$$

となるが，Re は**レイノルズ数** (Reynolds number) と呼ばれる無次元数であり，

$$\frac{\text{慣性項}}{\text{粘性項}} \cong \frac{U \cdot U/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} = Re \tag{4.7}$$

で示されるように，慣性項と粘性項の大きさの比を表す指標となる．そのため，$Re \gg 1$ の流れでは主に慣性力と圧力傾度力とが釣り合うのに対して，$Re \ll 1$ の時には粘性力が圧力傾度力と釣り合うことになる．

幾何学的に相似な境界をもつ 2 つの流れを考えよう．無次元化された方程式 (4.5) は，たとえ境界のスケールや無限遠での流速の大きさ，流体の粘性率が異なっているとしても，もし 2 つの流れのレイノルズ数が等しければ，無次元化した変数 $\tilde{\boldsymbol{u}}(\tilde{\boldsymbol{r}},\tilde{t}), \tilde{p}^*(\tilde{\boldsymbol{r}},\tilde{t})$ については同じ解が得られ，その結果として流れの場は互いに相似となることを示している．これを**レイノルズの相似則** (Reynolds'

† 特に $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ を**移流項** (advection term) と呼ぶ（**対流項** (convection term) ということもある）．あるいは非線形性に注目して**非線形項** (non-linear term) とも呼ばれる．

law of similarity) という．この相似則は同時に，境界条件が同じであってもレイノルズ数が異なれば違った流れになることを意味する．粘性項の役割が大きくなる低レイノルズ数の流れでは流れの様子が単純であるのに対して，高レイノルズ数の流れでは流れの様子が複雑なものとなる傾向にある．

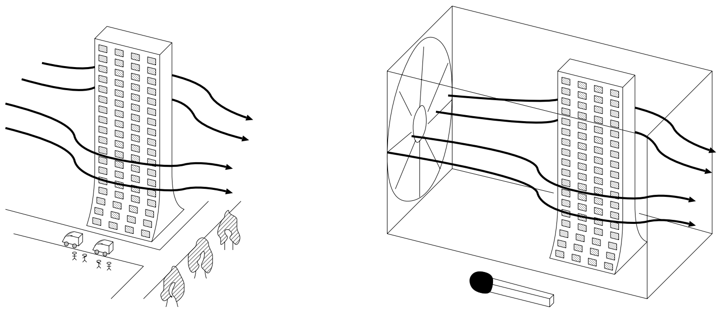

図 4.2　スケールが違ってもレイノルズ数が同じなら相似な流れ

4.2　ナヴィエ - ストークス方程式の厳密解

ナヴィエ - ストークス方程式は（移流項が存在するために）非線形の方程式であり，これを厳密に解くのは一般的に非常に難しい．しかし，流れが一方向を向いている場合（**平行流** (parallel flow) と呼ばれる）や，ある軸のまわりの同心円を描く場合には，非線形項が恒等的に 0 になるので比較的容易に厳密解を得ることができる．この節ではそのような厳密解の代表的なものをいくつか見てみよう．

4.2.1　クエット流

図 4.3 に示すように，2 枚の平行な板に挟まれた密度一様流体がある．下の板は静止し，上の板は速度 U で x 軸方向に動いているとすると，その間の流体がどのように運動するか考えよう．この場合，流れは x-y 面内の 2 次元流とみなせるので，連続の方程式とナヴィエ - ストークス方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \tag{4.10}$$

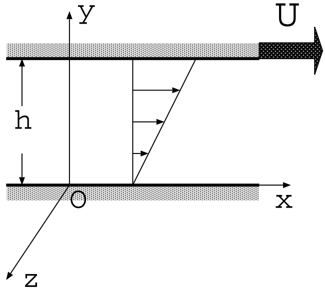

図 4.3 クエット流

また，境界条件は

$$\left.\begin{aligned} u=0,\ v=0 \quad &\text{at } y=0,\\ u=U,\ v=0 \quad &\text{at } y=h \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

である．流れは定常 $(\partial/\partial t=0)$ で x 方向に一様である $(\partial/\partial x = 0)$ とすると連続の方程式 (4.8) から $\partial v/\partial y=0$ となるが，$y=0$ での境界条件 $v=0$ を用いると全領域にわたって $v=0$ になり，したがってナヴィエ - ストークス方程式 (4.9), (4.10) は

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{4.12}$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{4.13}$$

となる．流れの方向にも圧力勾配がない場合を考えて $(\partial p/\partial x=0)$，

$$\left.\begin{aligned} u=0 \quad &\text{at } y=0,\\ u=U \quad &\text{at } y=h \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

の境界条件のもとで，$\partial p/\partial x=0$ とおいた (4.12) を解くと

$$u=U\frac{y}{h} \tag{4.15}$$

となって，両板の間の流体の流速は直線分布になることがわかる．このような流れを**クエット流** (Couette flow) と呼ぶ．

4.2.2 平面ポアズイユ流

静止している 2 枚の平行平板で挟まれた流体が一定の圧力勾配 $(\partial p/\partial x \neq 0)$ で流れる場合を考えると，流速は

$$u(y)=\frac{1}{2\rho\nu}\frac{dp}{dx}(y-h)y \tag{4.16}$$

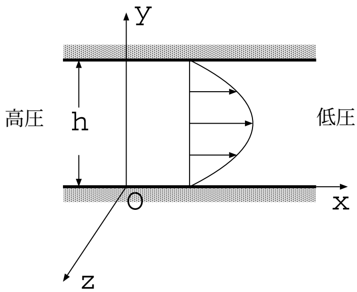

図 4.4 平面ポアズイユ流

のように放物線分布となる．この流れを**平面ポアズイユ流** (plane Poiseuille flow) と呼ぶ．平面ポアズイユ流において，最大流速 $U_{\rm max}$，流量 Q，平均流速 $U_{\rm mean}$ は，それぞれ次のように与えられる．

$$U_{\rm max} = -\frac{1}{8\rho\nu}\frac{dp}{dx}h^2, \tag{4.17}$$

$$Q = -\frac{1}{12\rho\nu}\frac{dp}{dx}h^3, \tag{4.18}$$

$$U_{\rm mean} = \frac{2}{3}U_{\rm max} \tag{4.19}$$

演習 4.1

平面ポアズイユ流の方程式を解いて，流速分布 (4.16) を導出せよ．また，最大流速 (4.17)，流量 (4.18)，平均流速 (4.19) を導出せよ．

4.2.3 ハーゲン - ポアズイユ流

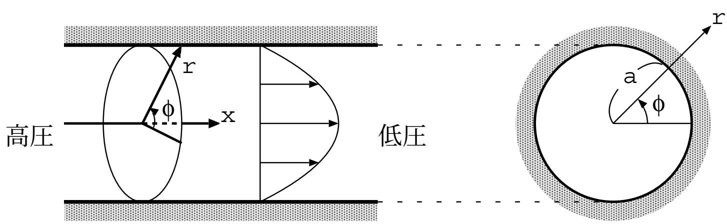

図 4.5 ハーゲン - ポアズイユ流

無限に長い半径 a の円形断面をもつ管路内の一様な流れを考える．円柱座標系における連続の方程式とナヴィエ - ストークス方程式は

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0, \tag{4.20}$$