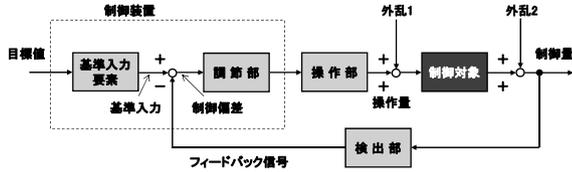


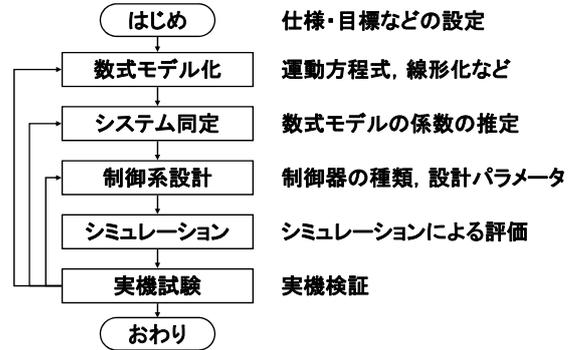
# 制御工学 概論

制御とは...

制御対象への入力を操作して、  
制御量を目標値に合わせる



# 制御系設計手順の例



# 古典制御と現代制御

古典制御	現代制御
周波数領域	時間領域
伝達関数	状態方程式
PID制御, 位相補償	状態フィードバック

# I 古典制御

- 伝達関数
- 周波数応答
- 安定判別
- フィードバック制御系

# 動的システム



## 動的システム

$y(t)$  が同時刻だけでなく過去の  $u(t; t \leq t_1)$  により影響される

## 静的システム

$y(t)$  が同時刻の  $u(t)$  だけで決まる

# ラプラス変換

## ラプラス変換

$t \geq 0$  で定義される関数  $f(t)$

• ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

• 逆ラプラス変換

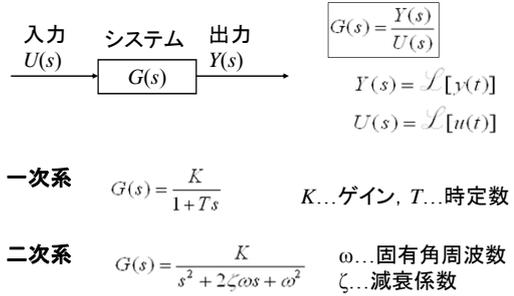
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

$f(t)$	$F(s)$
インパルス関数 $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$	1
単位ステップ関数 $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
$t^n$ $n$ : 自然数	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

## ラプラス変換

線形性	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
微分法則	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
積分法則	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
s 軸上の推移	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
t 軸上の推移	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
たたみ込み積分	$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$ $= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$

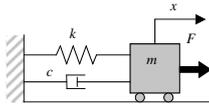
## 伝達関数



## 例 機械系

運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$



ラプラス変換する(初期値0)

$$ms^2 X(s) + c s X(s) + k X(s) = F(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$m$  質量  
 $c$  粘性係数  
 $k$  バネ定数  
 $x$  変位  
 $F$  外力

## 例 流体系

方程式

$$A \frac{dh}{dt} = -q_o + q_i, \quad q_o = c\sqrt{2gh} = k\sqrt{h}$$

平衡状態 ( $q_i = q_o = q_0, h_0$ ) からの微小変動を考慮して、線形化

$$A \Delta h = -\Delta q_o + \Delta q_i, \quad \Delta q_o = R \Delta h$$

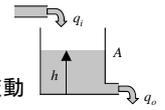
$$R = \frac{k}{2\sqrt{h_0}} = \frac{q_0}{2h_0}$$

ラプラス変換する

$$AsH(s) = -Q_o(s) + Q_i(s), \quad Q_o(s) = RH(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{As + R}$$



$A$  断面積  
 $h$  水位  
 $q_i$  流入流量  
 $q_o$  流出流量

## 例 電気系

回路方程式

$$e_i = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt$$

$$e_o = Ri$$

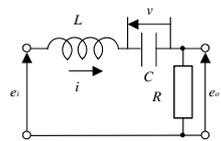
ラプラス変換する

$$E_i(s) = LsI(s) + RI(s) + \frac{I(s)}{Cs}$$

$$E_o(s) = RI(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Rs}{Ls^2 + Rs + 1/C}$$



$R$  抵抗  
 $L$  インダクタンス  
 $C$  容量  
 $i$  電流  
 $e_i$  入力電圧  
 $e_o$  出力電圧

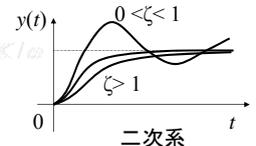
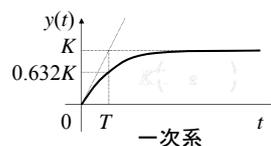
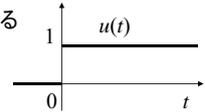
## 過渡応答

単位ステップ応答(インディシャル応答)

入力  $u(t) = 1 (t \geq 0)$  とする

$$\left( U(s) = \frac{1}{s} \right)$$

出力  $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right]$



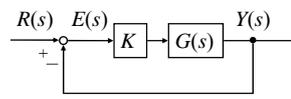
## 極と零点

伝達関数(既約)  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  において

分母  $D(s) = 0$  [特性方程式]の根...極, 特性根  
分子  $N(s) = 0$  の根.....零点

極の実部の正負 → 安定性  
零点の実部の正負 → 最小・非最小位相系

## 根軌跡

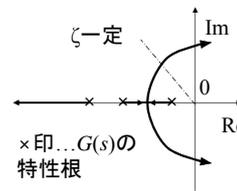


開ループ(一巡)伝達関数

$$G_o(s) = KG(s)$$

閉ループ伝達関数

$$G_c(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$



$K$  を  $0 \sim +\infty$  と変化させ,  
 $G_c(s)$  の特性根が  
 $s$  平面上を動く軌跡

## 周波数応答

周波数伝達関数  $G(j\omega)$

$G(s)$  に  $s = j\omega$  を代入

$$G(j\omega) = |G| e^{j\varphi}$$

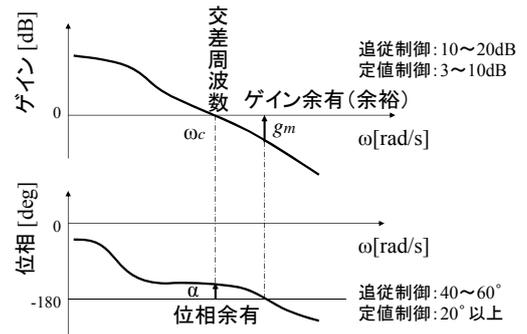
$|G|$  ...ゲイン  $\varphi = \angle G(j\omega)$  ...位相

周波数応答

Bode 線図

Nyquist 線図(ベクトル軌跡)

## Bode 線図

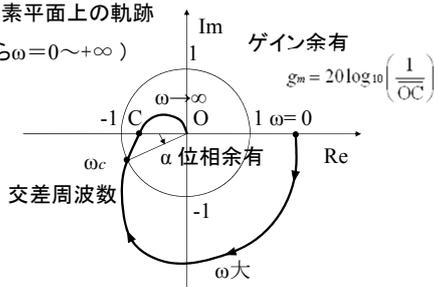


## Nyquist 線図

$\omega$  を  $-\infty \sim 0 \sim +\infty$  と変化させた時の

$G(j\omega)$  の複素平面上の軌跡

(対称性から  $\omega = 0 \sim +\infty$ )



## 安定判別

• Routh - Hurwitz の安定判別

特性方程式の係数から判別

• Nyquist の安定判別

開ループ伝達関数の Nyquist 線図から,  
閉ループ系の安定性を判別

## Hurwitz の安定判別

特性方程式  $s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0$

Hurwitz 行列式

$$H_n = \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-5} & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha_0 \end{vmatrix}$$

安定であるための必要十分条件

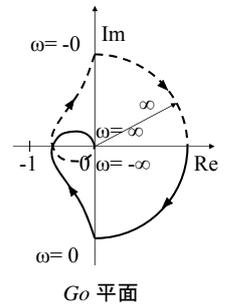
- (1) 係数  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) がすべて正
- (2) Hurwitz 行列式  $H_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ) がすべて正

## Nyquist の安定判別

・開ループ伝達関数  $G_o(s)$  で、 $\omega$  を  $-\infty \sim 0 \sim +\infty$  と変化した時の Nyquist 線図を描く

・R...Nyquist 線図が  $(-1+j0)$  点を反時計方向に回転する回数  
P...s平面の右半平面上にある  $G_o(s)$  の極の数

・ $R=P$  ならば、閉ループ系は安定

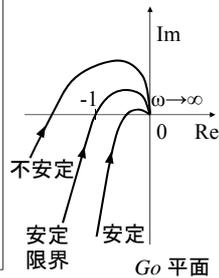


## Nyquist の安定判別 (狭義)

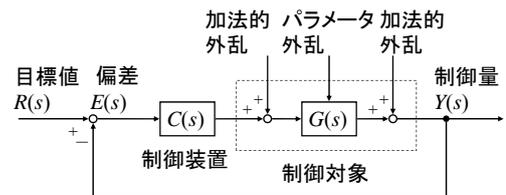
$P=0$  :  $G_o(s)$  が右半平面に極を持たない

開ループ伝達関数  $G_o(s)$  で  $\omega$  を  $0 \sim +\infty$  と変化した時の Nyquist 線図が  $\omega$  の増大とともに

- (1)  $(-1+j0)$  点を左に見て通る閉ループ系は安定
- (2)  $(-1+j0)$  点を右に見て通る閉ループ系は不安定
- (3)  $(-1+j0)$  点を通過する閉ループ系は安定限界



## フィードバック制御系



直列補償

開ループ(一巡)伝達関数  $G_o(s) = C(s) G(s)$

閉ループ伝達関数  $G_c(s) = \frac{C(s) G(s)}{1 + C(s) G(s)}$

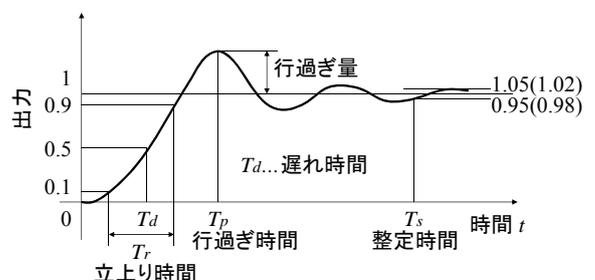
## 定常特性

定常偏差  $e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - y(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s)$   
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G_o(s)}$

偏差定数  $K_s = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s)$

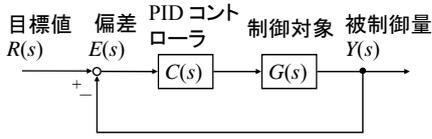
系の型	定常位置偏差	定常速度偏差	定常加速度偏差
0	$r_0/(1+K_0)$	$\infty$	$\infty$
1	0	$r_1/K_1$	$\infty$
2	0	0	$r_2/K_2$

## 過渡応答特性



インディシャル応答 (最終値=1の時)

## PID制御



$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

$$= K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

P...比例動作  $K_P$ ...比例ゲイン  
I...積分動作  $K_I$ ...積分ゲイン  
D...微分動作  $K_D$ ...微分ゲイン

## PIDのパラメータ調節

PI 動作...定常特性改善  
PD 動作...過渡特性改善(安定性, 速応性)

$K_P$  ... 比例ゲイン  
 $K_I$  ... 積分ゲイン  
 $K_D$  ... 微分ゲイン

} の調節

- Ziegler - Nichols の限界感度法
- 極配置による方法
- Bode 線図を用いた方法

## Ziegler - Nichols 法

(プロセス制御系, 閉ループ系の行過ぎ量約25%)

- P動作のみ [ $T_I = \infty, T_D = 0$ ] で, 閉ループ系が安定限界となるまで  $K_P$  を大きくする. その時の  $K_P$  を  $K_C$  とし, 持続振動の周期  $T_C$  を求める.
- 制御対象の Bode 線図より, ゲイン余有  $g_m$  と, その時の位相交点周波数  $\omega_c$  より  $20 \log_{10} K_C = g_m, T_C = 2 \pi / \omega_c$

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
P 動作	$0.5 K_C$	$\infty$	0
PI 動作	$0.45 K_C$	$0.83 T_C$	0
PID 動作	$0.6 K_C$	$0.5 T_C$	$0.125 T_C$

## 極配置による PIDゲイン決定

(制御対象の次数が2以下)

PID コントローラ  $C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$

制御対象  $G(s) = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0}$

閉ループ特性方程式

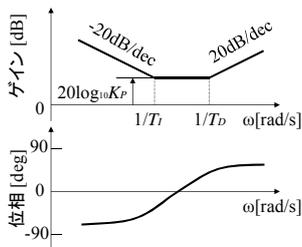
$$s^3 + (a_1 + K K_D) s^2 + (a_0 + K K_P) s + K K_I = 0 \quad (1)$$

極指定

$$(s + \mu_1)(s + \mu_2)(s + \mu_3) = s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0 \quad (2)$$

式(1)と(2)で係数比較

## Bode 線図による PIDゲイン決定

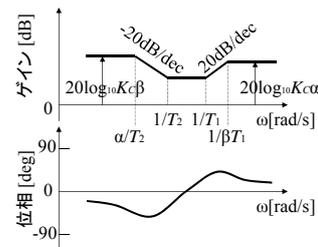


PIDコントローラのBode線図

### PIDゲイン決定手順例

- (1) 制御対象の伝達特性測定
- (2) 交差周波数 $\omega_c$  (応答性)と位相余有 $\alpha$  ( $40 \sim 60^\circ$ )の決定
- (3) PIDの位相特性の決定 ( $K_P=1$ として,  $T_I, T_D$ を決定)
- (4) PIDのゲイン $K_P$ の決定
- (5)  $G_o$ の特性確認
- (6) ステップ応答を確認

## 位相補償



位相進み遅れ補償器のBode線図

### 位相遅れ補償

定常特性改善 ( $\alpha < 1$ )  
 $G_\alpha(s) = \frac{K_C (1 + T_2 s)}{1 + (T_2 / \alpha) s}$

### 位相進み補償

過渡特性改善 ( $\beta < 1$ )  
 $G_\beta(s) = \frac{\beta (1 + T_1 s)}{1 + \beta T_1 s}$

### 位相進み遅れ補償

$C(s) = G_\beta(s) G_\alpha(s)$